## 基础课05 二次函数与一元二次方程、不等式

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 一元二次不等式的解法 | 理解 | 2023年新高考Ⅰ卷 | ★★☆ | 逻辑推理数学运算 |
| 三个“二次”关系的应用 | 了解 | 2023年新高考Ⅰ卷  2023年天津卷 | ★★☆ | 逻辑推理数学运算直观想象 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，本基础课内容为高考命题热点，常见的命题点：（1）一元二次不等式的解法，常与集合结合，一般以选择题的形式出现；（2）一元二次不等式的恒成立问题，常与函数结合，一般以选择题、填空题的形式出现，有时也会在解答题中出现，如求函数的单调区间、极值、最值时需要解不等式.预计2025年高考命题情况变化不大，整体比较稳定，复习时以基础题为主，但仍要注意与其他章节的综合应用 | | | |

### 基础知识·诊断

#### 夯实基础

##### 一、一元二次不等式

一般地,形如*ax*2*+bx+c>*0,或*ax*2*+bx+c<*0,或*ax*2*+bx+c*≥0,或*ax*2*+bx+c*≤0(其中,*x*为未知数,*a*,*b*,*c*均为常数,且*a*≠0)的不等式叫作一元二次不等式*.*

使一元二次不等式成立的所有未知数的值组成的集合叫作这个一元二次不等式的①解集*.*

##### 二、二次函数与相应的一元二次方程、不等式的关系

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 判别式 |  |  |  |
| 二次函数的图象 |  |  |  |
| 一元二次方程的根 | 有两个相异实根， | 有两个相等实根 | 没有实数根 |
| 的解集 | ②或 |  |  |
| ③的解集 |  |  |  |

【提醒】解不等式时，不要忘记讨论当时的情形.

##### 三、分式不等式的解法

1. ④；

2. ⑤.

#### 诊断自测

##### 题组1 走出误区

1. 判一判.（对的打“√”,错的打“×”）

（1） .( × )

（2） 若不等式的解集为,则必有.( √ )

（3） 若方程没有实数根,则不等式的解集为.( × )

（4） 不等式在上恒成立的条件是“且”.( × )

2. （易错题）若对，不等式恒成立，则实数的取值范围是.

**【易错点】**本题容易忽视二次项系数为0的情况.

[解析]当时，，符合题意；

当时，由解得.

综上所述，实数的取值范围是.

##### 题组2 走进教材

3. （人教A版必修①P55·T5改编）已知集合，，则.

[解析]由，得，即集合，

由，得或，即集合，所以.

4. （苏教版必修①P68·T6改编）设,,为实数，不等式的解集是或，则.

[解析]由条件知，2和3是方程的两根，故解得所以.

##### 题组3 走向高考

5. [2023·新高考Ⅰ卷改编]已知集合,，，则.

[解析]因为，且，所以.

### 考点聚焦·突破

#### 考点一 一元二次不等式的解法［多维探究］

##### 不含参数的一元二次不等式角度1

典例1 解下列不等式：

（1）；

（2）.

[解析]（1）由，得，所以，所以或，故原不等式的解集为.

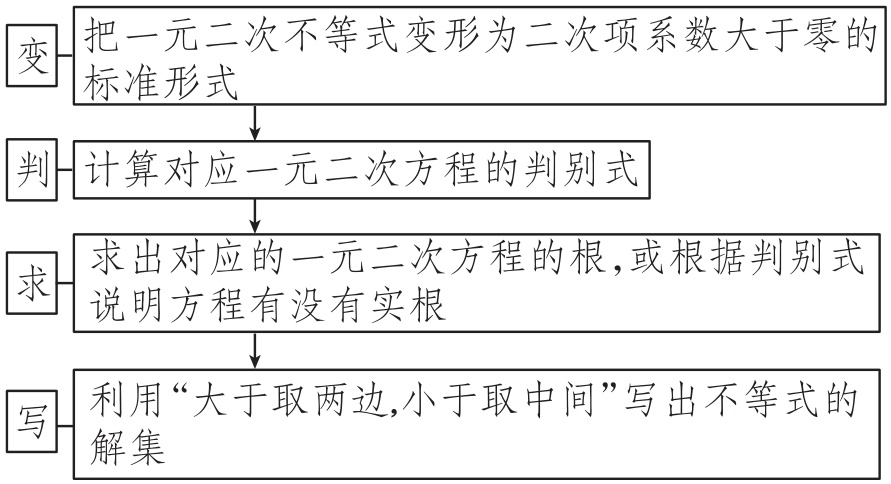
（2）由得，所以，所以，

所以解得或，

故原不等式的解集为或.



**解一元二次不等式的四个步骤**



##### 含参数的一元二次不等式角度2

典例2 解关于的不等式:

（1）;

（2）.

[解析]（1）原不等式可化为.

①当时，原不等式可化为,解得.

②当时，原不等式可化为,解得或.

③当时，原不等式可化为，

当，即时，解得;

当，即时，解得；

当,即时，解得.

综上所述，当时，不等式的解集为或;当时，不等式的解集为;当时，不等式的解集为;当时，不等式的解集为;当时，不等式的解集为.

（2）原不等式等价于.

当时,不等式的解集为;

当时,不等式的解集为;

当时,不等式的解集为或;

当时,不等式的解集为;

当时,不等式的解集为或.



**含参的一元二次不等式参数分类的三种类型**

1.根据二次项系数为正、负及零进行分类.

2.根据判别式 与0的大小关系判断根的个数.

3.有两个根时，有时还需要对两根的大小进行讨论.

##### 多维训练

1. 解下列不等式：

（1）；

（2）.

[解析]（1），，，故原不等式的解集为,.

（2），

或

解得 或，即不等式的解集为.

2. 解关于的不等式：

（1）；

（2）.

[解析]（1）.

当时，，解不等式得.

当时，，

①若，则，解不等式得或；

②若，则，解不等式得；

③若，则无解，即 ；

④若，则，解不等式得.

综上所述，当时，原不等式的解集为 ,；当时，原不等式的解集为；当时，原不等式的解集为,；当时，原不等式的解集为 ；当时，原不等式的解集为,.

（2）由，得，

当时，，即.

当时，原不等式可化，

①若，则，解不等式得或；

②若，则，解不等式得；

③若，原不等式可化为，显然无解，即 ；

④若，则，解不等式得.

综上所述，当时，原不等式的解集为 ,；当时，原不等式的解集为；

当时，原不等式的解集为,；

当时，原不等式的解集为 ；

当时，原不等式的解集为,.

#### 考点二 三个“二次”关系的应用［师生共研］

典例3 （多选题）若不等式的解集是，则( AB ).

A. B. 且

C. D. 不等式的解集是

[解析]由题意知，所以正确；

由题意可得,2分别是方程的两个根，所以所以得,，所以正确；因为是方程的根，所以将代入方程得，所以不正确；把,代入不等式，可得，因为，所以，即，此时不等式的解集为，所以不正确.故选.



1.一元二次方程的根就是相应的一元二次函数的零点，也是相应一元二次不等式解集的端点值.

2.给出一元二次不等式的解集，相当于知道了相应的二次函数图象的开口方向及与轴的交点，可以利用代入根或根与系数的关系求待定系数.

##### 针对训练

[2024·江苏校考]（多选题）已知关于的不等式的解集为或，则下列结论正确的是( AD ).

A.

B. 不等式的解集为

C. 不等式的解集为或

D.

[解析]由的解集为或，得，

故,,,故正确；

，故正确；

，解得，故错误；

，即，解得，故错误.故选.

#### 考点三 不等式恒（能）成立问题［多维探究］

##### 在上的恒成立问题角度1

典例4 [2024·云南校考]若不等式对一切恒成立，则实数的取值范围是( C ).

A. B. C. D.

[解析]当，即时，不等式为，对一切恒成立；

当时，

即

解得.

综上所述，实数的取值范围是.故选.



**不等式在上恒成立问题的解题策略**

1.不等式对任意实数恒成立或

2.不等式对任意实数恒成立或

##### 在给定区间上的恒成立问题角度2

典例5 （改编）已知对一切，，不等式恒成立，则实数的取值范围是( C ).

A. B. C. D.

[解析]，，则,，，又，，令，则原题设等价于对任意，恒成立，

的图象开口向下，对称轴为直线， 当时，取到最大值，，,

实数的取值范围是.故选.



**不等式在给定区间上恒成立问题的两个解题方法**

1.讨论参数的范围或分离参数转化为最值问题.

2.结合图象进行分类讨论，转化为零点的分布问题.

##### 给定参数范围的恒成立问题角度3

典例6 已知，不等式恒成立，则的取值范围为.

[解析]设，则即

解得或.



解决恒成立问题一定要明确自变量和参数，对于给定参数范围的恒成立问题，可以变换主元，把参数看作变量，把自变量看作参数，把不等式看作关于参数的函数来解决问题.

##### 不等式能成立（有解）问题角度4

典例7 若关于的不等式在上有解，则实数的取值范围是( C ).

A. , B. , C. , D.

[解析]因为关于的不等式在上有解，所以在上有解，

设，，其中在上单调递减，

所以的最小值为，

所以实数的取值范围是,.故选.



**解决不等式能成立（有解）问题的策略**

不等式能成立（有解）问题，一般转化为函数的最值问题：

1.能成立.

2.能成立.

##### 多维训练

（一题练透）已知关于的不等式.

（1） 是否存在实数,使不等式对任意恒成立?请说明理由.

[解析]当时，对任意不恒成立，不满足；

当时，无解.

故不存在实数，使得不等式对任意恒成立.

（2） 若不等式对任意恒成立，求实数的取值范围.

[解析]令.

当时，解得；

当时，在上不恒成立；

当时，因为二次函数图象的对称轴为直线，抛物线开口向下，所以只需，解得，矛盾.

综上，实数的取值范围为.

（3） 对于,不等式恒成立，求实数的取值范围.

[解析]利用主元法，设.

若当时，恒成立，

则即

解得，

所以实数的取值范围为，.

（4） 若不等式在上有解，求实数的取值范围.

[解析]因为，不等式可整理为,即,

设，则，

所以.

因为函数和函数在上均为增函数，所以函数在上为增函数,则函数在上为减函数，

所以.

故实数的取值范围为.